DIE HESSISCHE UND DIE CAYLEY'SCHE CURVE*

VON

PAUL GORDAN

Herr WHITE hat die Curven untersucht, welche mit einer gegebenen Curve 3ter Ordnung die Hessische Δ und die Cayley'sche s gemein haben. Im Anschluss an diese schöne Arbeit werden hier die Curven

$$\bar{\Delta} \text{ und } \bar{s}$$

aufgestellt, deren Hessische und Cayley'sche Curven gegebene Curven 3ter Ordnung

$$f(x) \text{ resp. } f(u)$$

sind.

Während die Δ und s den f eindeutig entsprechen gilt diess im Allgemeinen keineswegs von den $\bar{\Delta}$ und $\bar{s}$. Je nach der Beschaffenheit von f können verschiedene Fälle eintreten. Entweder entsprechen 3 verschiedene $\bar{\Delta}$, $\bar{s}$, oder eine, oder ganze Schaaren, oder endlich keine solche Curven.

§ 1.

Unterscheidungsmerkmale der Curven 3ter Ordnung.

Die wesentlichsten Unterscheidungsmerkmale für Curven 3ter Ordnung f bieten die Anzahl ihrer Doppelpunkte und Rückkehrpunkte und das Verschwinden ihrer Invarianten. Hat f mehr als einen Doppelpunkt so zerfällt es in Curven niederer Ordnung.

§ 2.

Eintheilung der Curven 3ter Ordnung.

Man kann nach diesen Merkmalen die Curven 3ter Ordnung in 10 Arten eintheilen, welche wir durch

$$C_1, \; C_2, \; \cdots, \; C_{10}$$

bezeichnen und so definiren:

1. Die C_1 haben keinen Doppelpunkt. Die Invariante S verschwindet nicht.
2. Die C_2 haben keinen Doppelpunkt. Die Invariante S verschwindet.
3. Die C_3 haben einen Doppelpunkt.

* Presented to the Society June 28, 1900. Received for publication June 10, 1900.

4. Die C_4 haben zwei Doppelpunkte. Sie zerfallen in einen Kegelschnitt und eine ihn in 2 Punkten schneidende Gerade.

5. Die C_5 haben 3 Doppelpunkte. Sie zerfallen in 3 Gerade, die ein Dreieck bilden.

6. Die C_6 haben einen Rückkehrpunkt.

7. Die C_7 zerfallen in einen Kegelschnitt und eine ihn berührende Gerade.

8. Die C_8 zerfallen in 3 Gerade, welche sich in einem Punkt schneiden.

9. Die C_9 arten in 2 Gerade aus, deren eine doppelt zu rechnen ist.

10. Die C_{10} arten in 1 Gerade aus, welche dreifach zu rechnen ist.

§ 3.

Die Normalformen der C.

Bei passender Wahl des Coördinatensystems lässt sich die Gleichung einer Curve 3ter Ordnung vereinfachen. Für verschiedene Curven bedarf man dazu verschiedene Coördinatensysteme. Die einfachsten Formen der Gleichungen der C nennen wir ihre Normalformen und wählen als solche die folgenden:

$$\begin{aligned}
C_1 &= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6mx_1x_2x_3\,;\\
C_2 &= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3\,;\\
C_3 &= x_2^3 + x_3^3 + 6x_1x_2x_3\,;\\
C_4 &= x_1^3 + 6x_1x_2x_3\,;\\
C_5 &= 6x_1x_2x_3\,;\\
C_6 &= 3x_1x_2^2 + x_3^3\,;\\
C_7 &= 3x_1x_2^2 + 3x_1^2x_3\,;\\
C_8 &= x_2^3 + x_3^3\,;\\
C_9 &= 3x_2^2x_3\,;\\
C_{10} &= x_1^3\,.
\end{aligned}$$

In den folgenden Paragraphen werden die Werthe der Covarianten

$$\Delta,\ s$$

und der Invarianten

$$S,\ T,\ R$$

dieser Normalformen angegeben und sodann ihre charakteristischen Beziehungen aufgestellt.

§ 4.

Die Hessische Form der Normalformen.

$$\begin{aligned}
\Delta(C_1) &= -\,6m^2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + 6(2m^3 + 1)x_1x_2x_3\,;\\
\Delta(C_2) &= 6x_1x_2x_3\,;
\end{aligned}$$

$$\Delta(C_3) = -6(x_2^3 + x_3^3) + 12x_1x_2x_3;$$
$$\Delta(C_4) = -6x_1^3 + 12x_1x_2x_3;$$
$$\Delta(C_5) = 12x_1x_2x_3;$$
$$\Delta(C_6) = -6x_2^2x_3;$$
$$\Delta(C_7) = -6x_1^3;$$
$$\Delta(C_8) = \Delta(C_9) = \Delta(C_{10}) = 0.$$

§ 5.

Die Cayley'sche Form der Normalformen.

$$s(C_1) = -6m(u_1^3 + u_2^3 + u_3^3) + 6(4m^3 - 1)u_1u_2u_3;$$
$$s(C_2) = -6u_1u_2u_3;$$
$$s(C_3) = -6u_1^3 + 24u_1u_2u_3;$$
$$s(C_4) = 24u_1u_2u_3;$$
$$s(C_5) = 24u_1u_2u_3;$$
$$s(C_6) = -6u_1^2u_3;$$
$$s(C_7) = -3u_3^3;$$
$$s(C_8) = s(C_9) = s(C_{10}) = 0.$$

§ 6.

Die Invariante S der Normalformen.

$$S(C_1) = 24m(m^3 - 1);$$
$$S(C_3) = S(C_4) = S(C_5) = 24;$$
$$S(C_2) = S(C_6) = S(C_7) = S(C_8) = S(C_9) = S(C_{10}) = 0.$$

§ 7.

Die Invariante T der Normalformen.

$$T(C_1) = 6\,(8m^6 + 20m^3 - 1);$$
$$T(C_2) = -6;$$
$$T(C_3) = T(C_4) = T(C_5) = 48;$$
$$T(C_6) = T(C_7) = T(C_8) = T(C_9) = T(C_{10}) = 0.$$

§ 8.

Die Invariante R der Normalformen.

$$R(C_1) = 36\,(8m^3 + 1)^3;$$
$$R(C_2) = 36;$$
$$R(C_3) = R(C_4) = \cdots = R(C_{10}) = 0.$$

§ 9.

Relationen zur Charakterisirung der Arten C.

Die 10 Arten C_ρ der Curven 3ter Ordnung f sind im § 3 im Wesentlichen geometrisch definirt worden. Wir wollen nunmehr die Relationen hinschreiben- welche zwischen ihren Covarianten und Invarianten bestehen, wenn f einer be, stimmten Art angehört.

1. Für C_1 $\quad R \neq 0$, $\quad S \neq 0$.
2. Für C_2 $\quad R \neq 0$, $\quad S = 0$.
3. Für C_3 $\quad R = 0$, $\quad \Pi = Ts - St = 0$.
4. Für C_4 $\quad \Pi = 0$, $\quad (f\Delta u) \neq 0$.
5. Für C_5 $\quad (f\Delta u) = 0$, $\quad S \neq 0$.
6. Für C_6 $\quad S = T = 0$, $\quad \mathrm{K} \neq 0$.
7. Für C_7 $\quad S = T = \mathrm{K} = 0$, $\quad \Delta \neq 0$.
8. Für C_8 $\quad \Delta = 0$, $\quad F = (\Theta\Theta u)^2 \neq 0$.
9. Für C_9 $\quad \Delta = F = 0$, $\quad \Theta \neq 0$.
10. Für C_{10} $\quad \Theta = 0$.

§ 10.

Definition des Normaldreieckes.

Hat man aus diesen Relationen zwischen den Coefficienten der Gleichung der Curve 3ter Ordnung f erkannt, zu welcher Art sie gehört, so handelt es sich darum, sie in die Normalform zu transformiren. Diess geschieht, indem wir ein Dreieck angeben, auf das bezogen sie in der Normalform erscheint. Ein solches Dreiecknennen wir *Normaldreieck* und bezeichnen seine Seiten durch x_1, x_2, x_3 und seine Ecken durch u_1, u_2, u_3. Den einzelnen Arten C von f entsprechen verschiedene Normaldreiecke. Die der C_1 sind die Wendedreiecke.

Die Normaldreiecke der 5 ersten C sind in endlicher Anzahl vorhanden; die der 5 letzten Arten treten in Schaaren auf. In den folgenden Paragraphen werden die Normaldreiecke für die einzelnen C bestimmt.

§ 11.

Die U_ρ und die V_ρ.

Die Produkte der Seiten und die Produkte der Ecken des Normaldreiecks von C_ρ bezeichnen wir durch

$$U(C_\rho) = x_1 x_2 x_3 ; \quad V(C_\rho) = u_1 u_2 u_3 .$$

Sie haben für die 5 ersten C die Werthe:

$$U(C_1) = \kappa f + \lambda\Delta \quad \text{wo} \quad \kappa^4 - S\kappa^2\lambda^2 - \tfrac{2}{3}T\kappa\lambda^3 - \tfrac{1}{12}S^2\lambda^4 = 0\,;$$
$$U(C_2) = \Delta\,, \quad V(C_2) = s\,;$$
$$V(C_3) = 3\,St + 5\,Ts\,;$$
$$V(C_4) = s\,, \quad U(C_4) = s(s) = \tfrac{1}{3}S^2f + \tfrac{2}{3}\,T\Delta\,;$$
$$U(C_5) = f\,.$$

Die Cayley'schen Curven der U und V sind die entsprechenden V und U.

Die Berechnung von $U(C_1)$ erfordert die Auflösung einer Gleichung 4ten Grades, die der andern C nur lineare Gleichungen.

§ 12.

Bestimmung der Normaldreiecke der 5 ersten C.

Durch Spaltung der Produkte U und V in ihre Faktoren erhält man die Seiten und die Ecken der Normaldreiecke.

Bei

$$C_1\,,\ C_2\,,\ C_5$$

bedarf man hierzu die Auflösung einer kubischen Gleichung.

Bei C_3 ist

$$V = u_a^3 = 3\,St + 5\,Ts = u_1u_2u_3\,,$$

und

$$\Pi = u_1^3 = Ts - St\,,$$

der Cubus der Ecke u_1. Die Ecken u_2 und u_3 findet man durch Spaltung des Produktes:

$$u_1^{-1}u_a^3 = u_2u_3\,,$$

oder auch des Produktes:

$$3u_a^2v_a\cdot v_1^2 - 3u_av_a^2\cdot u_1v_1 + v_a^3u_1^2 = u_2u_3\cdot v_1^3\,.$$

Bei C_4 ist

$$U = \tfrac{1}{3}S^2f + \tfrac{2}{3}T\Delta = p_x^3 = x_1x_2x_3$$

und

$$Tf - S\Delta = x_1^3\,.$$

Die Seiten x_2 und x_2 findet man aus dem Produkte:

$$x_1^{-1}p_x^3 = x_2x_3\,,$$

oder auch aus dem Produkte:

$$3p_x^2p_y\cdot y_1^2 - 3p_xp_y^2\cdot x_1y_1 + p_y^3x_1^2 = x_2x_3\cdot y_1^3\,.$$

Im Ganzen erfordert die Aufstellung der Normaldreiecke

1) bei C_1 eine biquadratische und eine kubische Gleichung;
2) bei C_2 und C_5 eine kubische Gleichung;
3) bei C_3 und C_4 eine quadratische Gleichung.

§ 13.

Bestimmung der Normaldreiecke der 5 letzten C.

Zu den 5 letzten C gehören Schaaren von Normaldreiecken:

$$x_1, \ x_2, \ x_3; \quad u_1, \ u_2, \ u_3.$$

Für sie haben die Produkte U und V keine besondere Bedeutung. Wir wollen die bestimmbaren Stücke einzeln berechnen.

1. *Das Normaldreieck von* C_6.

Die Ecke u_1 und die Seite x_2 bestimmt man aus

$$\Theta = -8x_2^2u_1^2,$$

und die Ecke u_3 und die Seite x_3 aus

$$s = -6u_1^2u_3, \quad \Delta = -6x_2^2x_3,$$

oder auch aus

$$3u_s v_s^2 v_1 + 2u_1 v_s^3 = -6u_3 v_1^3, \quad 3\Delta_x\Delta_y^2 y_2 - 2\Delta_y^3 x_2 = -6x_3 y_2^3.$$

2. *Das Normaldreieck von* C_7.

Die Ecke u_3 und die Seite x_1 bestimmt man aus

$$s_3 = -3u_3^3, \quad \Delta = -6x_1^3;$$

x_2 ist eine beliebige Gerade durch u_3; u_1 ist der weitere Schnittpunkt von x_2 mit f; und x_3 ist die Tangente, welche f im Punkte u_1 berührt.

3. *Das Normaldreieck von* C_8.

Die Ecke u_1 und die Seiten x_2 und x_3 bestimmt man aus

$$\Theta = -2u_1^2x_2x_3;$$

x_1 ist eine beliebige Gerade.

4. *Das Normaldreieck von* C_9.

Die Ecke u_1 und die Seite x_2 bestimmt man aus

$$\Theta = -2u_1^2x_2^2,$$

und die Seite x_3 aus

$$f = a_x^3 + 3x_1^2x_3,$$

oder auch aus

$$3a_xa_y^2 \cdot y_1 - 2a_y^3 \cdot x_1 = 3y_1^3 \cdot x_3;$$

x_1 ist eine beliebige Gerade.

5. *Das Normaldreieck von* C_{10}.

Die Seite x_1 bestimmt man aus

$$f = x_1^3.$$

Die Seiten x_2 und x_3 sind beliebige Gerade.

Zur Aufstellung der Normaldreiecke der 5 letzten C ist höchstens eine quadratische Gleichung nöthig.

§ 14.

Die Arten der Hessischen und der Cayley'schen Curven.

In §§ 4 und 5 sind die Hessischen und Cayley'schen Curven der Normalformen aufgestellt worden; wir entnehmen daraus die Arten, denen sie angehören und stellen die Resultate in diesen Tabellen zusammen.

1. *Die Arten der Hessischen Curven.*

Die C_1 und C_2 sind Hessische Curven der C_1.
Die C_3 sind Hessische Curven der C_3.
Die C_4 sind Hessische Curven der C_4.
Die C_5 sind Hessische Curven der C_2 und C_5.
Die C_9 sind Hessische Curven der C_6.
Die C_{10} sind Hessische Curven der C_7.
Die C_6, C_7, C_8 sind keine Hessischen Curven.

2. *Die Arten der Cayley'schen Curven.*

Die C_1 und C_2 sind Cayley'sche Curven der C_1.
Die C_4 sind Cayley'sche Curven der C_3.
Die C_5 sind Cayley'sche Curven der C_2, C_4, und C_5.
Die C_9 sind Cayley'sche Curven der C_6.
Die C_{10} sind Cayley'sche Curven der C_7.
Die C_3, C_6, C_7, C_8 sind keine Cayley'schen Curven.

In den letzten Formeln entstehen die C linker Hand aus denen des § 3 indem man die x durch u ersetzt.

§ 15.

Die Arten der Curven $\overline{\Delta}$ und $\overline{s}$.

Diese Tabellen setzen uns in den Stand die Arten der Curven $\overline{\Delta}$ und $\overline{s}$ anzugeben, welche zu den Curven 3ter Ordnung gehören.

1. *Die Arten der $\overline{\Delta}$.*

Die $\overline{\Delta}$ der C_1 und C_2 sind Curven C_1.
Die $\overline{\Delta}$ der C_3 sind Curven C_3.
Die $\overline{\Delta}$ der C_4 sind Curven C_4.
Die $\overline{\Delta}$ der C_5 sind Curven C_2 und C_5.
Die $\overline{\Delta}$ der C_9 sind Curven C_6.
Die $\overline{\Delta}$ der C_{10} sind Curven C_7.
Zu den Curven

$$C_6,\ C_7,\ C_8$$

gehören keine $\overline{\Delta}$.

2. *Die Arten der* $\bar{s}$.

Die $\bar{s}$ der C_1 und C_2 sind Curven C_1.
Die $\bar{s}$ der C_4 sind Curven C_3.
Die $\bar{s}$ der C_5 sind Curven C_2, C_4, C_5.
Die $\bar{s}$ der C_9 sind Curven C_6.
Die $\bar{s}$ der C_{10} sind Curven C_7.
Zu den Curven

$$C_3,\ C_6,\ C_7,\ C_8$$

gehören keine $\bar{s}$.

§ 16.

Definition der Moduln der Curven $\bar{\Delta}$ *und* $\bar{s}$.

Die linken Seiten der Gleichungen der Curven:

$$\bar{\Delta}(f) = 0\,; \quad \bar{s}(f) = 0\,,$$

sind bis auf Faktoren bestimmt, die im Allgemeinen von den Coefficienten von f abhängen. Ist

$$\bar{\Delta}(f) = v\,; \quad \bar{s}(f) = w\,,$$

so hat man

$$\Delta(v) = C_1 f; \quad s(w) = C_2 f.$$

Die Faktoren C_1 und C_2 nennen wir die *Moduln* von $\bar{\Delta}$ und $\bar{s}$ und bezeichnen sie durch

$$C_1 = M\big(\bar{\Delta}(f)\big)\,; \quad C_2 = M\big(\bar{s}(f)\big)\,.$$

§ 17.

Die Werthe der $\bar{\Delta}$ *der Normalformen.*

$$\begin{aligned}
\bar{\Delta}(C_1) &= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6\mu x_1 x_2 x_3 && \left(m = \frac{1+2\mu^3}{-6\mu^2}\right); \\
\bar{\Delta}(C_2) &= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6\mu x_1 x_2 x_3 && (0 = 1 + 2\mu^3)\,; \\
\bar{\Delta}(C_3) &= x_2^3 + x_3^3 - 18 x_1 x_2 x_3\,; \\
\bar{\Delta}(C_4) &= x_1^3 - 18 x_1 x_2 x_3\,; \\
\bar{\Delta}(C_5) &= -\,18 x_1 x_2 x_3 \text{ und } l_1 x_1^3 + l_2 x_2^3 + l_3 x_3^3\,; \\
\bar{\Delta}(C_9) &= 3 x_1 x_2^2 + \lambda x_3^3\,; \\
\bar{\Delta}(C_{10}) &= 3 x_1 x_2^2 + 3\lambda\, x_1^2 x_3\,.
\end{aligned}$$

Es entsprechen

den Curven C_1 3 Curven $\bar{\Delta}$,
den Curven C_2 3 Curven $\bar{\Delta}$,
den Curven C_3 1 Curve $\bar{\Delta}$,
den Curven C_4 1 Curve $\bar{\Delta}$,
den Curven C_5 1 Curve $\bar{\Delta}$,

und ausserdem

den Curven C_5, C_9, C_{10} Schaaren von Curven $\bar{\Delta}$.

Die Bestimmung der $\overline{\Delta}$ der Normalformen erfordert bei den C_1 und C_2 die Auflösung einer kubischen Gleichung; bei C_2 hat sie numerische Coefficienten. Die übrigen $\overline{\Delta}(C)$ sind linear bestimmbar.

§ 18.

Die Werthe der $\bar{s}$ der Normalformen.

$$\bar{s}(C_1) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6\mu x_1 x_2 x_3 \qquad \left(m = \frac{4\mu^3 - 1}{-6\mu}\right);$$

$$\bar{s}(C_2) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6\mu x_1 x_2 x_3 \qquad (4\mu^3 = 1);$$

$$\bar{s}(C_4) = x_2^3 - \tfrac{2}{3}\mu^2 x_3^3 + 6\mu x_1 x_2 x_3;$$

$$\bar{s}(C_5) = l_1 x_1^3 + l_2 x_2^3 + l_3 x_3^3 \text{ und } \lambda x_1^3 + 6\mu x_1 x_2 x_3 \qquad (4\mu^3 = 1);$$

$$\bar{s}(C_9) = 3x_1^2 x_2 + \lambda x_3^3;$$

$$\bar{s}(C_{10}) = 3x_2^2 x_3 + 3\lambda x_1 x_3^2.$$

In diesen Formeln entstehen die C aus denen des § 3, indem man die x durch die u ersetzt.

Den Curven C_1 und C_2 entsprechen je 3 Curven $\bar{s}$, den übrigen C Curvenschaaren.

Die Bestimmung der

$$\bar{s}(C_1),\ \bar{s}(C_2),\ \bar{s}(C_3)$$

erfordert die Auflösung kubischer Gleichungen, von denen die beiden letzten numerische Coefficienten haben. Die übrigen $\bar{s}(C)$ sind linear bestimmbar.

§ 19.

Die Werthe der Moduln der $\overline{\Delta}(C)$ und $\bar{s}(C)$.

1. *Die Moduln der $\overline{\Delta}(C)$.*

$$M\big(\overline{\Delta}(C_1)\big) = -6\mu^2;$$

$$M\big(\overline{\Delta}(C_2)\big) = -6\mu^2;$$

$$M\big(\overline{\Delta}(C_3)\big) = -54;$$

$$M\big(\overline{\Delta}(C_4)\big) = -54;$$

$$M\big(\overline{\Delta}(C_5)\big) = -54 \text{ und } l_1 l_2 l_3;$$

$$M\big(\overline{\Delta}(C_9)\big) = -2\lambda;$$

$$M\big(\overline{\Delta}(C_{10})\big) = -6\lambda^2.$$

2. *Die Moduln der* $\bar{s}(C)$.

$$\begin{aligned} M\big(\bar{s}(C_1)\big) &= -\,6\mu\,; \\ M\big(\bar{s}(C_2)\big) &= -\,6\mu\,; \\ M\big(\bar{s}(C_4)\big) &= \quad 4\mu^3\,; \\ M\big(\bar{s}(C_5)\big) &= -\,l_1 l_2 l_3 \text{ und } 1\,; \\ M\big(s(C_9)\big) &= -\,2\lambda\,; \\ M\big(\bar{s}(C_{10})\big) &= -\,6\lambda\,. \end{aligned}$$

§ 20.

Bestimmung der $\bar{\Delta}$ und $\bar{s}$ mit Hülfe der Normalformen.

Um die $\bar{\Delta}$ und $\bar{s}$ einer Curve 3ter Ordnung f zu erhalten kann man sich der Normalformen bedienen. Man transformirt f in die Normalform und berechnet von dieser die gesuchten Curven. Hierbei sind diese Gleichungen erforderlich:

1. Für die C_1 1 biquadratische und 2 kubische Gleichungen.
2. Für die C_2 2 kubische Gleichungen.
3. Für die C_3 1 quadratische Gleichung.
4. Für die C_4 1 quadratische Gleichung.
5. Für die C_5
   1) bei Bestimmung der $\bar{\Delta}$ eine kubische Gleichung;
   2) bei Bestimmung der $\bar{s}$ 2 kubische Gleichungen, deren eine numerische Coefficienten hat.
6. Für die C_9 und C_{10} bedarf man keine Gleichungen höheren Grades.

Für die Arten

$$C_3\,,\ C_4\,,\ \cdots,\ C_{10}$$

empfiehlt sich die Benutzung der Normalformen.

§ 21.

Bestimmung der $\bar{\Delta}$ und $\bar{s}$ ohne Hülfe der Normalformen.

Bei den C_1 und C_2 ist der Durchgang durch die Normalformen nicht zweckmässig, weil er die Auflösung überflüssiger Gleichungen verlangt.

Die C_1 und C_2 haben keinen Doppelpunkt, bei ihnen ist

$$R = T^2 - \tfrac{1}{6}S^3 \neq 0\,.$$

Bei ihnen wollen wir die $\bar{\Delta}$ und $\bar{s}$ direkt berechnen, indem wir der Reihe nach diese Formen bestimmen:

1. Die absoluten Invarianten:

$$u(\bar{\Delta})\,,\ u(\bar{s}) \qquad (u = S^3/T^2)\,.$$

2. Die Invarianten:

$$T(\bar{\Delta}),\ S^3(\bar{\Delta}),\ R(\bar{\Delta}),\ T(\bar{s}),\ S^3(\bar{s}),\ R(\bar{s}).$$

3. Die $\bar{\Delta}$ und $\bar{s}$ selbst.

Nur die Berechnung der absoluten Invarianten erfordert die Auflösung einer kubischen Gleichung, die übrigen Formen werden daraus linear bestimmt.

§ 22.

Einige Covarianten und Invarianten von Δ und s.

Die einfachsten Covarianten und Invarianten von f sind

$$\Delta,\ s,\ t,\ S,\ T,\ R.$$

Wir entnehmen die Werthe einiger von ihnen, für Δ und s gebildet, dem Aufsatze, Mathematische Annalen, Bd. 6.

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} 12\,\Delta(\Delta) &= S^2 f - 4T\Delta;\\ 12\,S(\Delta) &= 8T^2 - S^3;\\ 72\,T(\Delta) &= 3S^3T - 16T^3;\\ 12^3 R(\Delta) &= -S^6 R;\\ 3\,s(s) &= S^2 f + 2T\Delta;\\ 9\,t(s) &= 2S^2Tf + (S^3 - 2T^2)\Delta;\\ 3\,S(s) &= S^3 + 2T^2;\\ 9\,T(s) &= 3S^3T - 2T^3. \end{aligned}\right.$$

$$(2)\quad R(s) = -\tfrac{2}{9}S^3R^2.$$

Wir setzen daraus diese Formeln zusammen.

$$(3)\quad u(\Delta) = -3\,\frac{(u-8)^3}{(3u-16)^2};$$

$$(4)\quad T = -6\,\frac{T(\Delta)}{S(\Delta)}\,\frac{u-8}{3u-16};$$

$$(5)\quad S^2 f = 12\Delta(\Delta) + 4T\Delta;$$

$$(6)\quad u(s) = 3\,\frac{(u+2)^3}{(3u-2)^2};$$

$$(7)\quad T = 3\,\frac{T(s)}{S(s)}\,\frac{u+2}{3u-2};$$

$$(8)\quad S^2Rf = (T^2 - \tfrac{1}{2}S^3)\,s(s) + 3T\,t(s).$$

§ 23.

Die den C_1 und C_2 entsprechenden Curven $\bar{\Delta}$.

Ersetzt man in den Formeln 1, 3, 4, 5 des §22 die Form Δ durch f, so gehen

$$S, \quad T, \quad R, \quad u, \quad f, \quad \Delta, \quad S(\Delta), \quad T(\Delta), \quad R(\Delta), \quad u(\Delta), \quad \Delta(\Delta)$$

in

$$S(\bar{\Delta}), \quad T(\bar{\Delta}), \quad R(\bar{\Delta}), \quad u(\bar{\Delta}), \quad \bar{\Delta}, \quad f, \quad S, \quad T, \quad R, \quad u, \quad \Delta$$

über und man hat

$$12^3 R = - S^6(\bar{\Delta}) R(\bar{\Delta}) + 0,$$

$$u = -3 \frac{\left(u(\bar{\Delta}) - 8\right)^3}{\left(3u(\bar{\Delta}) - 16\right)^2},$$

$$T(\bar{\Delta}) = -6 \frac{T}{S} \frac{u(\bar{\Delta}) - 8}{3u(\bar{\Delta}) - 16},$$

$$(9) \qquad S^2(\bar{\Delta})\bar{\Delta} = 12\Delta + 4T(\bar{\Delta})f.$$

§ 24.

Die den C_1 und C_2 entsprechenden Curven $\bar{s}$.

Ersetzt man in den Formeln 2, 6, 7, 8 des § 22 die Form s durch f, so gehen

$$S, \quad T, \quad R, \quad u, \quad f, \quad s, \quad S(s), \quad T(s), \quad R(s), \quad u(s), \quad s(s), \quad t(s)$$

in

$$S(\bar{s}), \quad T(\bar{s}), \quad R(\bar{s}), \quad u(\bar{s}), \quad \bar{s}, \quad f, \quad S, \quad T, \quad R, \quad u, \quad s, \quad t$$

über und man hat

$$R = - \tfrac{2}{9} S^3(\bar{s}) R^2(\bar{s}) + 0,$$

$$u = 3 \frac{\left(u(\bar{s}) + 2\right)}{\left(3u(\bar{s}) - 2\right)^2},$$

$$T(\bar{s}) = 3 \frac{T}{S} \frac{u(\bar{s}) + 2}{3u(\bar{s}) - 2},$$

$$(10) \qquad S^3(\bar{s}) R(\bar{s}) \bar{s} = \left(T^2(\bar{s}) - \tfrac{1}{2} S(\bar{s})\right) s + 3T(\bar{s}) t.$$

§ 25.

Endgültige Umgränzung der Sätze über Tripel von Curven.

Den Sätzen, auf die sich die Untersuchungen des Herrn WHITE beziehen, nämlich: "Es giebt Tripel von Curven welche mit f die Hessischen und Tripel welche mit f die Cayley'schen gemein haben," entspricht nach (9) und (10) (§§ 23, 24) der Satz:

Zu jeder Curve C_1 und C_2 gehören 3 Curven $\bar{\Delta}$ und 3 Curven $\bar{s}$.